CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

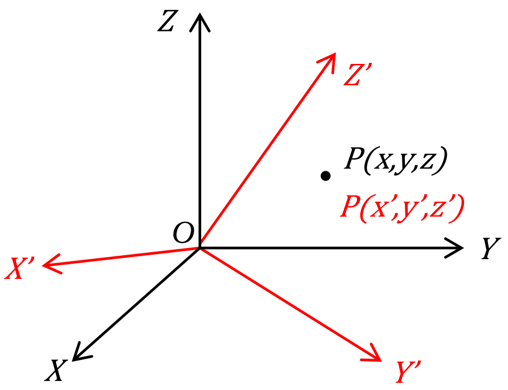
Las simulaciones de relojes de Sol presentadas en esta aplicación requieren comprender el funcionamiento de los sistemas de coordenadas astronómicas, esféricas y cartesianas, así como los métodos para realizar la conversión entre ellos. Este conocimiento permite calcular con precisión la proyección de un punto en el espacio sobre un plano, es decir, determinar la sombra de un objeto sobre dicho plano.

En el último epígrafe aplicaremos la proyección solar a distintos tipos de cuadrantes que están girados respecto del sistema de coordenadas horizontal.

2. GIRO DE EJES EN UN SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO.

Tenemos un sistema de referencia cartesiano en el espacio $R = \{O, X, Y, Z\}$ y le aplicamos un giro manteniendo fijo el origen de coordenadas (O). Obtenemos un nuevo sistema $R' = \{O, X', Y', Z'\}$ cuyos ejes forman los siguientes ángulos:

- α, β, γ son los ángulos formados por el eje X' con los ejes $X, Y, Z,$ respectivamente
- α', β', γ' son los ángulos formados por el eje Y' con los ejes $X, Y, Z,$ respectivamente
- $\alpha'', \beta'', \gamma''$ son los ángulos formados por el eje Z' con los ejes $X, Y, Z,$ respectivamente



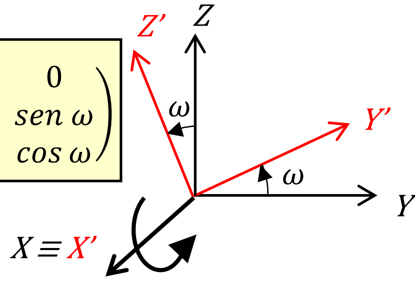
Las nuevas coordenadas x', y', z' de un punto $P(x,y,z)$ se obtienen con la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \end{pmatrix}}_{A\ (\text{matriz de giro de } R \text{ a } R')} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Veamos cómo queda la matriz de rotación para giros particulares. Consideraremos que un giro es positivo si se realiza en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj). En caso contrario será negativo.

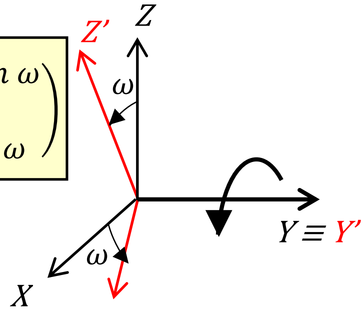
- **Giro $+\omega$ alrededor del eje *X***

$$A_X = \begin{pmatrix} \cos 0^o & \cos 90^o & \cos 90^o \\ \cos 90^o & \cos\omega & \cos(90^o-\omega) \\ \cos 90^o & \cos(90^o+\omega) & \cos\omega \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \operatorname{sen}\omega \\ 0 & -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega \end{pmatrix}}$$



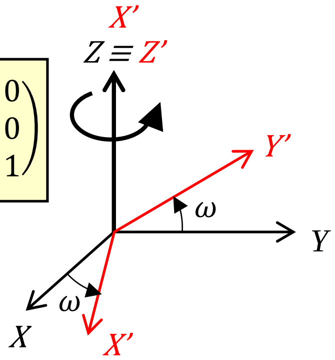
- **Giro $+\omega$ alrededor del eje *Y***

$$A_Y = \begin{pmatrix} \cos\omega & \cos 90^o & \cos(90^o+\omega) \\ \cos 90^o & \cos 0 & \cos 90^o \\ \cos(90^o-\omega) & \cos 90^o & \cos\omega \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\omega & 0 & -\operatorname{sen}\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\omega & 0 & \cos\omega \end{pmatrix}}$$



- **Giro $+\omega$ alrededor del eje *Z***

$$A_Z = \begin{pmatrix} \cos\omega & \cos(90^o-\omega) & \cos 90^o \\ \cos(90^o+\omega) & \cos\omega & \cos 90^o \\ \cos 90^o & \cos 90^o & \cos 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\omega & \operatorname{sen}\omega & 0 \\ -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



Si combinamos giros en torno a varios ejes, multiplicaremos las matrices de rotación en el orden adecuado (actúan de derecha a izquierda).

Ejemplo combinado.

Dado un punto P(2,1,3), giramos el sistema ***90º alrededor del eje X*** *y luego otros* ***90º alrededor del eje Y****. Queremos determinar las nuevas coordenadas x',y',z'.*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 90^o & 0 & -\operatorname{sen} 90^o \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} 90^o & 0 & \cos 90^o \end{pmatrix}}_{A_Y} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^o & \operatorname{sen} 90^o \\ 0 & -\operatorname{sen} 90^o & \cos 90^o \end{pmatrix}}_{A_X} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

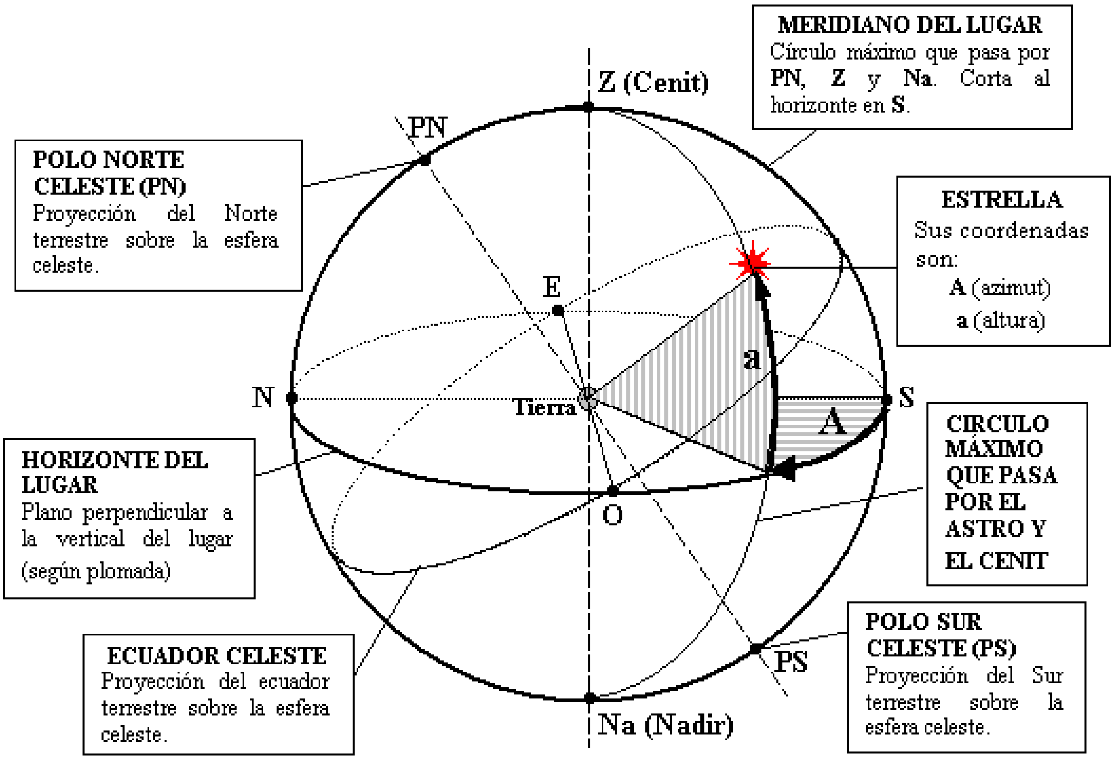
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x \end{cases}$$

Es decir el punto P expresado en el sistema $\{O, X', Y', Z'\}$ será: **P(1,3,2)**

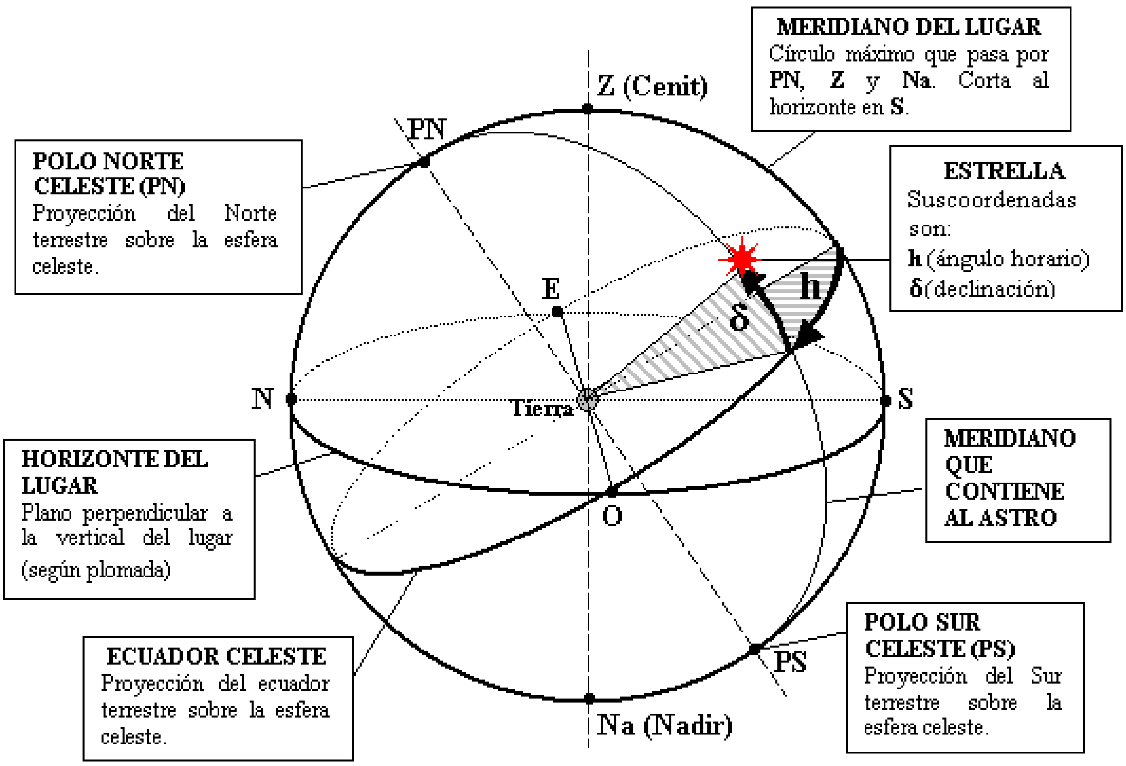
3. COORDENADAS ASTRONÓMICAS UTILIZADAS EN RELOJES DE SOL

Las coordenadas astronómicas que necesitamos para los relojes de Sol son las horizontales y las ecuatoriales horarias. Ambas están expresadas en forma esférica, con radio unidad.

- **Coordenadas horizontales**

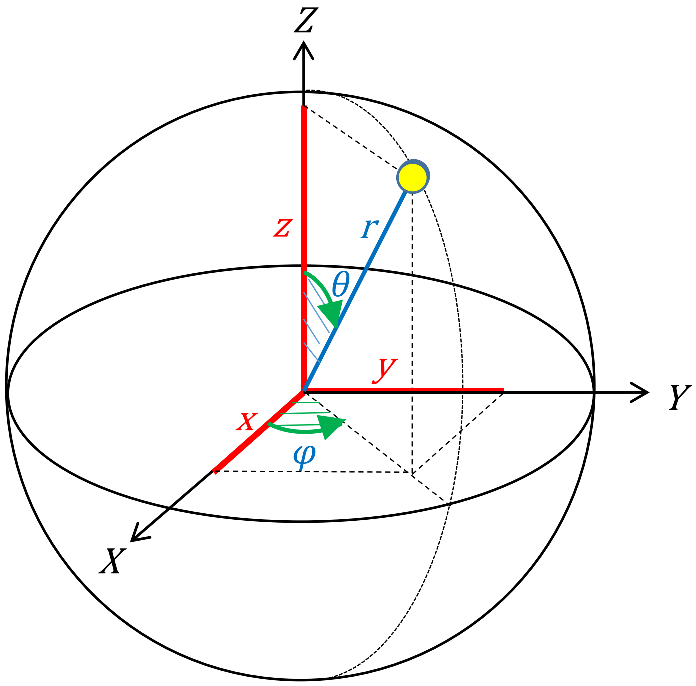


- **Coordenadas ecuatoriales horarias**



4. COORDENADAS ESFÉRICAS Y PASO A CARTESIANAS

En un sistema esférico, una posición en el espacio se describe con tres parámetros:

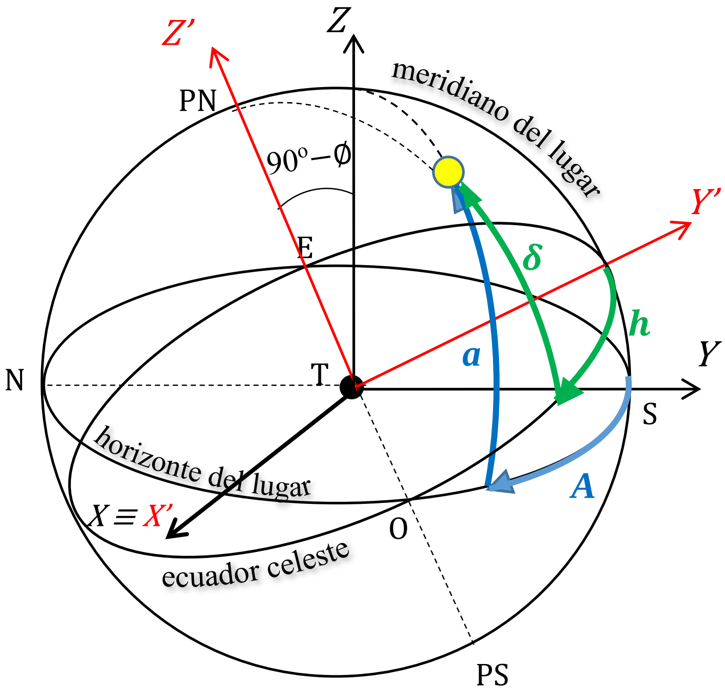


1. **r:** La distancia desde el origen (radio).
2. **θ (theta)**: El ángulo polar (0° a 180°).
3. **φ (phi)** : El ángulo azimutal (0° a 360°),

Para convertir a coordenadas cartesianas, se utilizan las siguientes fórmulas:

$$x = r \cdot sen\,\theta \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot sen\,\theta \cdot sen\,\varphi$$
$$z = r \cdot \cos\theta$$

5. PASO DE COORDENADAS ASTRONÓMICAS A CARTESIANAS



Tanto las coordenadas horizontales como las ecuatoriales horarias están expresadas en forma esférica, con radio unidad, pero se toman los complementarios de los ángulos azimutales (**φ**) y de los polares (**θ**), ya que ***A*** y ***h*** empiezan en el meridiano del lugar, ***a*** en el horizonte y ***δ*** en el ecuador. Es decir:

$$Coord.\,horizontales: \begin{cases} r = 1 \\ A = 90^o - \varphi \\ a = 90^o - \theta \end{cases}$$

$$\begin{matrix} Coord.\,ecuatoriales \\ horarias: \end{matrix} \begin{cases} r = 1 \\ h = 90^o - \varphi \\ \delta = 90^o - \theta \end{cases}$$

Necesitamos pasar las coordenadas astronómicas a sistemas cartesianos, cuyo origen es la Tierra (puntual). Consideraremos el sistema $\{X, Y, Z\}$ para las horizontales y $\{X', Y', Z'\}$ para las ecuatoriales horarias; ambos comparten el eje de abscisas ($X \equiv X'$).

Las fórmulas de paso quedan así:

HORIZONTALES	$x = \cos a \cdot sen\, A$ $y = \cos a \cdot \cos A$ $z = sen\, a$

ECUATORIALES HORARIAS	$x' = cos\, \delta \cdot sen\, h$ $y' = cos\, \delta \cdot cos\, h$ $z' = sen\, \delta$

6. RELACIÓN ENTRE COORDENADAS ASTRONÓMICAS

Utilizando trigonometría esférica o giros de sistemas de referencia, podemos pasar entre sistemas de coordenadas. Por ejemplo, girando en sentido antihorario el sistema ecuatorial horario un ángulo igual a la colatitud $(90^\circ - \emptyset)$ para conseguir el sistema horizontal:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\omega & sen\,\omega \\ 0 & -sen\,\omega & cos\,\omega \end{pmatrix}}_{A\ (matriz\ de\ giro\ de\ R'\ a\ R)} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},\ con\ \omega = -(90^\circ - \emptyset\,) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sen\,\emptyset & -cos\,\emptyset \\ 0 & cos\,\emptyset & sen\,\emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \cdot sen\,\emptyset - z' \cdot cos\,\emptyset \\ z = y' \cdot cos\,\emptyset + z' \cdot sen\,\emptyset \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a \cdot sen\,A = cos\,\delta \cdot sen\,h \quad (\mathbf{1}) \\ \cos a \cdot \cos A = cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot sen\,\emptyset - sen\,\delta \cdot cos\,\emptyset \quad (\mathbf{2}) \\ sen\,a = cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot cos\,\emptyset + sen\,\delta \cdot sen\,\emptyset \quad (\mathbf{3}) \end{cases}$$

De aquí podemos extraer algunas fórmulas interesantes:

$$*\ De\ (\mathbf{1}):\quad \cos a \cdot sen\,A = cos\,\delta \cdot sen\,h \Rightarrow \boxed{sen\,A = \frac{cos\,\delta \cdot sen\,h}{\cos a}}$$

$$*\ De\ (\mathbf{2}):\quad \cos a \cdot \cos A = cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot sen\,\emptyset - sen\,\delta \cdot cos\,\emptyset \cos A \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos A = \frac{cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot sen\,\emptyset - sen\,\delta \cdot cos\,\emptyset}{\cos a}}$$

$$Dividiendo\ seno\ entre\ coseno:\quad tg\,A = \frac{\frac{cos\,\delta \cdot sen\,h}{\cos a}}{\frac{cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot sen\,\emptyset - sen\,\delta \cdot cos\,\emptyset}{\cos a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg\,A = \frac{cos\,\delta \cdot sen\,h}{cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot sen\,\emptyset - sen\,\delta \cdot cos\,\emptyset} \Rightarrow (dividimos\ entre\ \ cos\,\delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\,A = \frac{sen\,h}{cos\,h \cdot sen\,\emptyset - tg\,\delta \cdot cos\,\emptyset}}$$

$$*\ De\ (\mathbf{3}):\ \boxed{sen\,a = cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot cos\,\emptyset + sen\,\delta \cdot sen\,\emptyset}$$

A: azimut
a: altura
h: ángulo horario
δ: declinación
$\emptyset$: latitud

7. VECTOR DE POSICIÓN DEL SOL

El vector de posición del Sol en coordenadas cartesianas respecto al horizonte del lugar, expresado en función del ángulo horario (***h***) y de la declinación (***δ***), se obtiene con un giro de sistemas, como hicimos en el apartado 6:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \operatorname{sen}\omega \\ 0 & -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},\ con\ \omega = -(90^{\circ} - \emptyset),\ \Rightarrow$$

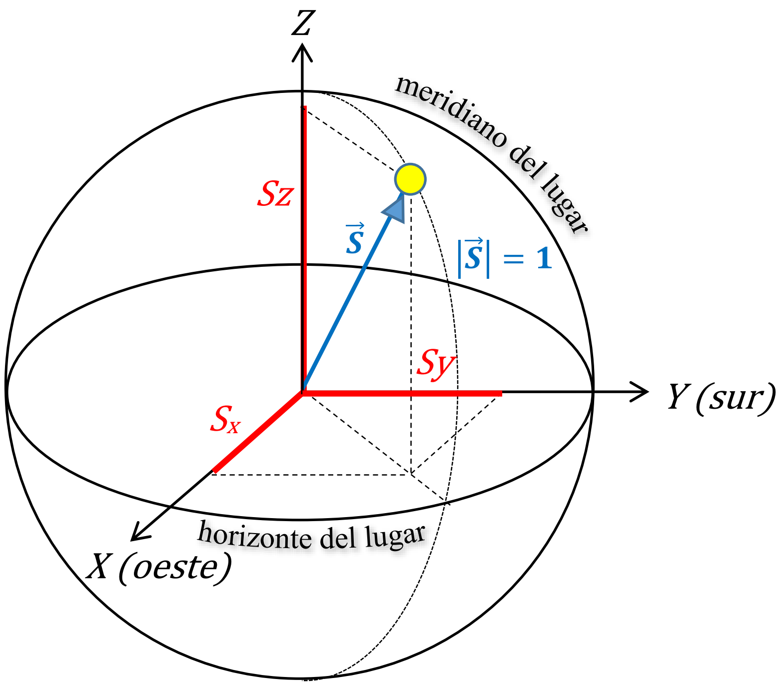
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\emptyset & -\cos\emptyset \\ 0 & \cos\emptyset & \operatorname{sen}\emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \cdot \operatorname{sen}\emptyset - z' \cdot \cos\emptyset \\ z = y' \cdot \cos\emptyset + z' \cdot \operatorname{sen}\emptyset \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos\delta \cdot \operatorname{sen} h \\ y = \cos\delta \cdot \cos h \cdot \operatorname{sen}\emptyset - \operatorname{sen}\delta \cdot \cos\emptyset \\ z = \cos\delta \cdot \cos h \cdot \cos\emptyset + \operatorname{sen}\delta \cdot \operatorname{sen}\emptyset \end{cases}.$$

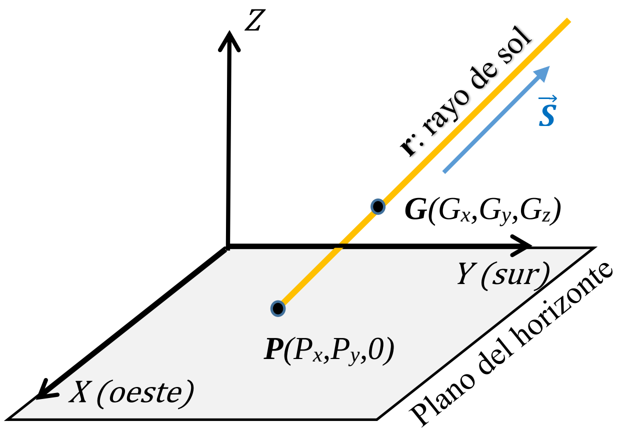
Por tanto:

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)\ ,siendo \begin{cases} S_x = \cos\delta \cdot \operatorname{sen} h \\ S_y = \cos\delta \cdot \cos h \cdot \operatorname{sen}\emptyset - \operatorname{sen}\delta \cdot \cos\emptyset \\ S_z = \cos\delta \cdot \cos h \cdot \cos\emptyset + \operatorname{sen}\delta \cdot \operatorname{sen}\emptyset \end{cases}\ y\ \ |\vec{S}| = 1$$

Este vector es el director de los rayos solares y permitirá determinar la sombra proyectada de un punto en el plano del horizonte.



8. PROYECCIÓN SOLAR DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO



Consideramos el sistema horizontal, donde *Y* apunta al sur y el plano *XY* representa el horizonte ($z = 0$). Vamos a determinar la sombra de un punto (proyección solar) sobre dicho plano. El punto podría ser, por ejemplo, el extremo del gnomon y tiene coordenadas conocidas. La dirección para efectuar la proyección está determinada por el vector de posición del Sol $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$. Es importante tener en cuenta que, debido a la gran distancia que nos separa del Sol, los rayos solares se consideran paralelos entre sí.

La recta **r** que pasa por el punto **G**(G_x,G_y,G_z) y tiene como vector director $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ es:

$$\frac{x - G_x}{S_x} = \frac{y - G_y}{S_y} = \frac{z - G_z}{S_z} \quad \mathbf{(4)}$$

Esta recta cortará al plano del horizonte ($z = 0$) en el punto ***P***$(P_x,P_y,0)$. Sustituyendo en **(4)** las coordenadas de ***P*** (desconocidas) y el valor $z = 0$, llegamos a:

$$\frac{P_x - G_x}{S_x} = \frac{P_y - G_y}{S_y} = \frac{-G_z}{S_z} \quad \Rightarrow \begin{cases} P_x = \dfrac{-S_x}{S_z} \cdot G_z + G_x \\ P_y = \dfrac{-S_y}{S_z} \cdot G_z + G_y \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \mathbf{(5)}$$

En estas expresiones, conocemos tanto las coordenadas de ***G*** como las del vector $\vec{S}$, que recordamos a continuación:

$$\begin{cases} S_x = \cos\delta \cdot \mathrm{sen}\, h \\ S_y = \cos\delta \cdot \cos h \cdot \mathrm{sen}\, \emptyset - \mathrm{sen}\, \delta \cdot \cos \emptyset \\ S_z = \cos\delta \cdot \cos h \cdot \cos\emptyset + \mathrm{sen}\, \delta \cdot \mathrm{sen}\, \emptyset \end{cases}$$

Para una latitud ($\boldsymbol{\phi}$) y una declinación ($\boldsymbol{\delta}$) dadas, es sencillo obtener, mediante un ordenador, las proyecciones de ***G*** a lo largo del día. Esto se logra realizando un proceso en el que el ángulo horario (**h**) varía a intervalos iguales. También podríamos ir cambiando otras variables. Estos procedimientos nos permitirán simular el movimiento de la sombra del gnomon en el cuadrante solar, así como dibujar líneas horarias, líneas estacionales, analemas, entre otros elementos, para cierto tipo de relojes solares.

Consideraremos que el cuadrante del reloj se encuentra en el plano *X'Y'* de un sistema de referencia $\{X', Y', Z'\}$, girado con respecto a $\{X, Y, Z\}$; utilizando las fórmulas de giro, podemos determinar en el nuevo sistema las coordenadas de $\vec{S}$ y ***G***. Posteriormente, emplearemos las fórmulas **(5)** para hallar el punto ***P***.

A continuación, veremos distintos cuadrantes en sistemas girados respecto al horizontal.

OBSERVACIONES IMPORTANTES:

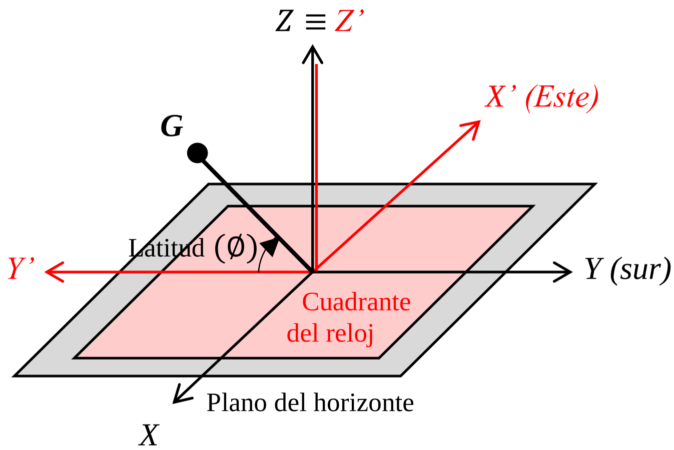
- El cuadrante siempre lo situaremos en el plano $z' = 0$.
- Cuando efectuemos varios giros, los ejes del sistema girado siguen manteniendo la notación $\{X, Y, Z\}$. Sólo cuando lleguemos, con el último giro, al cuadrante del reloj, utilizaremos $\{X', Y', Z'\}$.

9. PROYECCIÓN SOLAR SOBRE DISTINTOS TIPOS DE CUADRANTES

➢ CUADRANTE HORIZONTAL

- **Cuadrante horizontal con latitud nula o positiva ($\emptyset \geq 0$)**

Este cuadrante se sitúa en el plano del horizonte, pero el sistema de referencia está girado 180º en el eje Z. El gnomon es polar (paralelo al eje de rotación terrestre) y mide la unidad, por lo que su punto extremo (***G***) tiene las siguientes coordenadas:



$$\begin{cases} G_{x'} = 0 \\ G_{y'} = 1 \cdot \cos\emptyset = \cos\emptyset \\ G_{z'} = 1 \cdot sen\ \emptyset = sen\ \emptyset \end{cases}$$

Para obtener el vector de posición del Sol en el sistema de referencia ligado al reloj, tenemos en cuenta que dicho sistema está girado 180º en el eje Z. Por lo que:

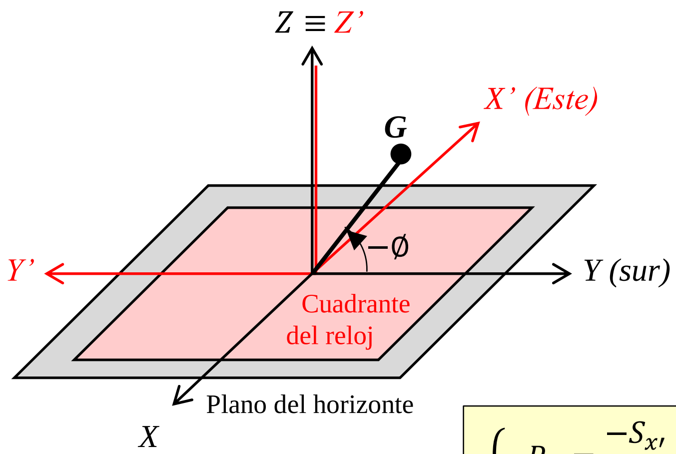
$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,180° & sen\,180° & 0 \\ -sen\,180° & cos\,180° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_x \\ -S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de la proyección de G en el cuadrante del reloj quedan así:

$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x}{S_z} \cdot sen\ \emptyset \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{S_y}{S_z} \cdot sen\ \emptyset + cos\,\emptyset \end{cases} \quad (\emptyset \geq \mathbf{0})$$

- **Cuadrante horizontal con latitud negativa ($\emptyset < 0$)**

Para utilizar el reloj con la misma orientación, debemos tomar el ángulo $-\emptyset$ o el valor absoluto de $\emptyset$. Sólo cambian las coordenadas de ***G***, que quedan así:



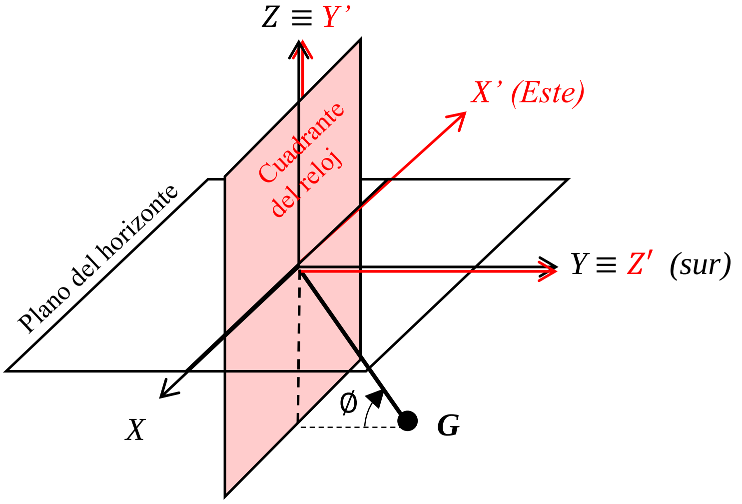
$$\begin{cases} G_{x'} = 0 \\ G_{y'} = 1 \cdot (-\cos(-\emptyset)) = -\cos\emptyset \\ G_{z'} = 1 \cdot sen\ (-\emptyset) = -sen\ \emptyset \end{cases}$$

Las coordenadas de P serán:

$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = -\dfrac{S_x}{S_z} \cdot sen\ \emptyset \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = -\dfrac{S_y}{S_z} \cdot sen\ \emptyset - cos\,\emptyset \end{cases} \quad (\emptyset < \mathbf{0})$$

➢ CUADRANTE VERTICAL ORIENTADO

- **Cuadrante vertical orientado (mira al sur) para latitud nula o positiva ($\emptyset \geq 0$)**



El cuadrante es perpendicular al plano del horizonte. El gnomon es polar y mide la unidad, por lo que su punto extremo (***G***) tiene las siguientes coordenadas:

$$\textbf{(6)}\begin{cases} G_{x'} = 0 \\ G_{y'} = 1 \cdot (-sen\ \emptyset) = -sen\ \emptyset \\ G_{z'} = 1 \cdot cos\ \emptyset = cos\ \emptyset \end{cases}$$

Para llegar al cuadrante hay que efectuar dos giros: uno de 180º en el eje Z y, después, 90º en el eje X. Por tanto, las coordenadas del vector de posición del Sol serán:

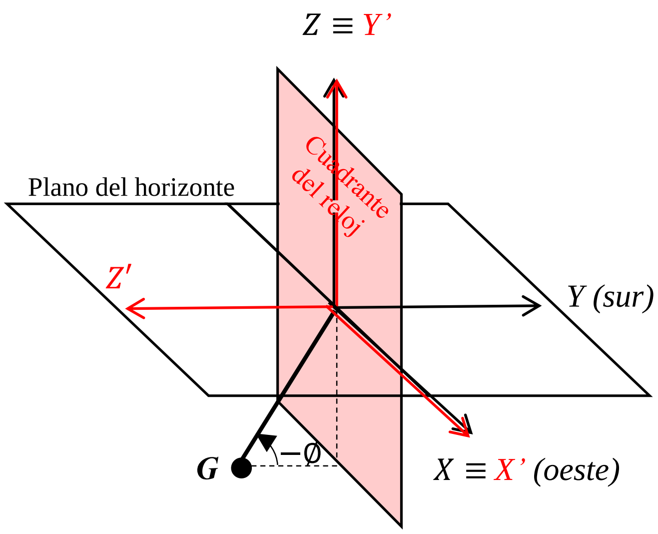
$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ 90° & sen\ 90° \\ 0 & -sen\ 90° & cos\ 90° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\ 180° & sen\ 180° & 0 \\ -sen\ 180° & cos\ 180° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_x \\ S_z \\ S_y \end{pmatrix} \quad \textbf{(7)}$$

P queda así:

$$\boxed{\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x}{S_y} \cdot cos\ \emptyset \\[2ex] P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{-S_z}{S_y} \cdot cos\ \emptyset - sen\ \emptyset \end{cases}}$$

- **Cuadrante vertical orientado (mira al norte) para latitud negativa ($\emptyset < 0$)**



Para que la disposición y lectura del reloj sea parecida al caso anterior, vamos a hacer que el nuevo cuadrante mire al norte; para ello, giramos el anterior 180º en eje Y. Además, debemos tomar el ángulo $-\emptyset$ o el valor absoluto de $\emptyset$ para los cálculos. Las coordenadas de ***G*** quedan así:

$$\textbf{(8)}\begin{cases} G_{x'} = 0 \\ G_{y'} = 1 \cdot (-sen\ (-\emptyset)) = sen\ \emptyset \\ G_{z'} = 1 \cdot cos(-\emptyset) = cos\ \emptyset \end{cases}$$

Las coordenadas de $\vec{\boldsymbol{S}}$ se obtienen aplicando el giro de 180º a **(7)**:

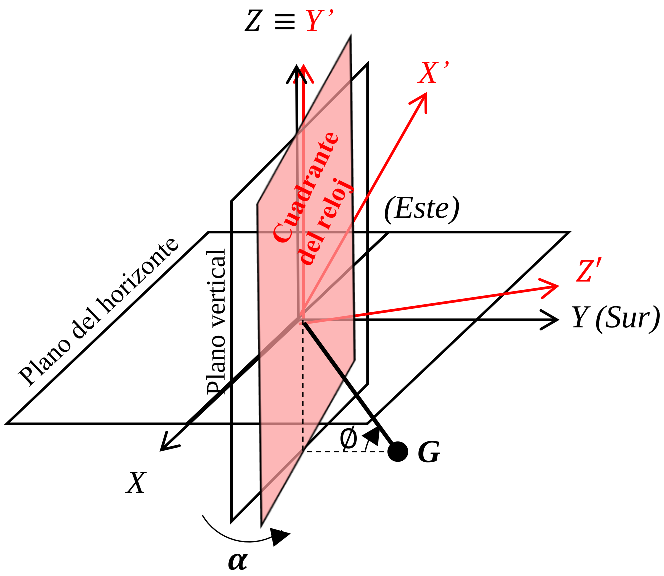
$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & 0 & -\mathrm{sen}\, 180^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\, 180^\circ & 0 & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S_x \\ S_z \\ S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S_x \\ S_z \\ S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_z \\ -S_y \end{pmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x}{S_y} \cdot \cos \emptyset \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{S_z}{S_y} \cdot \cos \emptyset + \mathrm{sen}\, \emptyset \end{cases}$$

➢ CUADRANTE VERTICAL DECLINANTE

- **Cuadrante vertical declinante para latitud nula o positiva ($\emptyset \geq 0$)**



El cuadrante es perpendicular al plano del horizonte y no mira al sur necesariamente, sino que está girado un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ en sentido antihorario visto desde el eje *Y* del plano vertical. El gnomon es polar y mide la unidad. Tanto las coordenadas de **G** como las de $\vec{\boldsymbol{S}}$ cambian respecto al cuadrante vertical orientado debido al nuevo giro $\boldsymbol{\alpha}$. Partimos de los resultados **(6)** y **(7)**:

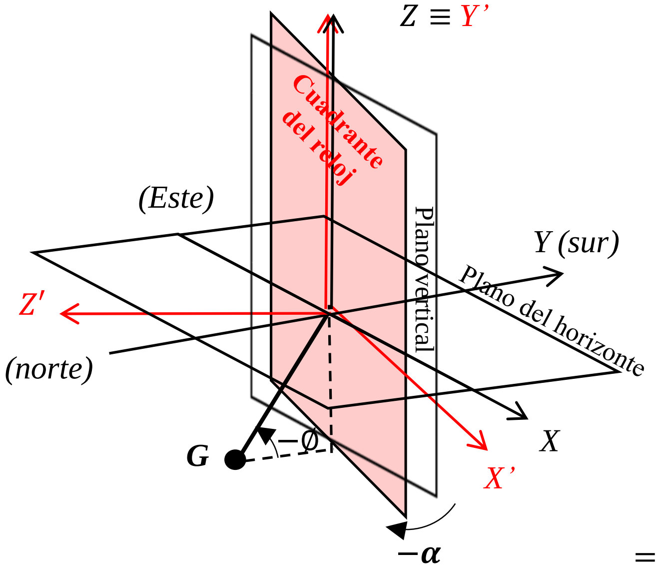
$$\begin{pmatrix} G_{x'} \\ G_{y'} \\ G_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\mathrm{sen}\, \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\, \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{sen}\, \emptyset \\ \cos \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\, \alpha \cdot \cos \emptyset \\ -\mathrm{sen}\, \emptyset \\ \cos \alpha \cdot \cos \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\mathrm{sen}\, \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\, \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S_x \\ S_z \\ S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_x \cdot \cos \alpha - S_y \cdot \mathrm{sen}\, \alpha \\ S_z \\ -S_x \cdot \mathrm{sen}\, \alpha + S_y \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \textbf{(10)}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x \cdot \cos \alpha + S_y \cdot \mathrm{sen}\, \alpha}{-S_x \cdot \mathrm{sen}\, \alpha + S_y \cdot \cos \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \emptyset - \mathrm{sen}\, \alpha \cdot \cos \emptyset \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{-S_z}{-S_x \cdot \mathrm{sen}\, \alpha + S_y \cdot \cos \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \emptyset - \mathrm{sen}\, \emptyset \end{cases}$$

- **Cuadrante vertical declinante para latitud negativa ($\emptyset < 0$)**



El cuadrante es perpendicular al plano del horizonte y no mira al norte necesariamente, sino que está girado un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ en sentido horario visto desde el eje *Y* del plano vertical. El gnomon es polar y mide la unidad. Tanto las coordenadas de $\boldsymbol{G}$ como las de $\vec{\boldsymbol{S}}$ cambian respecto al cuadrante vertical orientado debido al nuevo giro (ponemos $-\boldsymbol{\alpha}$ por hacerse en sentido horario). Partimos de los resultados **(8)** y **(9)**:

$$\begin{pmatrix} G_{x'} \\ G_{y'} \\ G_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(-\alpha) & 0 & -sen\,(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\,(-\alpha) & 0 & cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ sen\,\emptyset \\ cos\,\emptyset \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos\,\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & cos\,\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ sen\,\emptyset \\ cos\,\emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\,\alpha \cdot \cos\emptyset \\ sen\,\emptyset \\ \cos\alpha \cdot \cos\emptyset \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & cos\,\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_z \\ -S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \cdot cos\,\alpha - S_y \cdot sen\,\alpha \\ S_z \\ -S_x \cdot sen\,\alpha - S_y \cdot cos\,\alpha \end{pmatrix}$$

Por tanto:

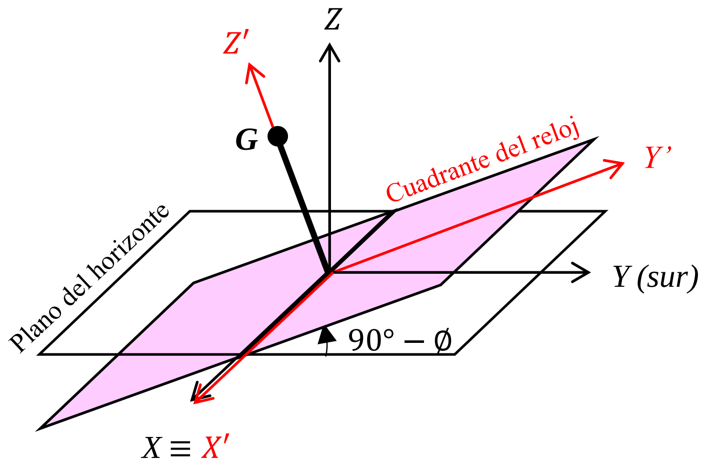
$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{-S_x \cdot cos\,\alpha + S_y \cdot sen\,\alpha}{-S_x \cdot sen\,\alpha - S_y \cdot cos\,\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\emptyset + sen\,\alpha \cdot \cos\emptyset \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{-S_z}{-S_x \cdot sen\,\alpha - S_y \cdot cos\,\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\emptyset + sen\,\emptyset \end{cases}$$

➢ CUADRANTE ECUATORIAL

- **Cara norte**

El cuadrante está girado un ángulo (colatitud) en el eje *X*. El gnomon es polar y de longitud unidad. Está situado en el eje *Z'*. Las coordenadas de su extremo son $\boldsymbol{G}(0,0,1)$.

Las coordenadas de $\vec{\boldsymbol{S}}$ se obtienen haciendo un giro de $90^{o} - \emptyset$ en el eje *X*.



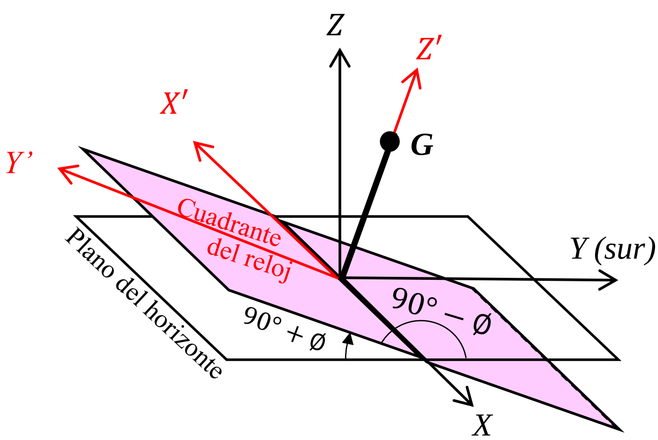
$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(90° - \emptyset) & sen\,(90° - \emptyset) \\ 0 & -sen\,(90° - \emptyset) & cos\,(90° - \emptyset) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sen\,\emptyset & cos\,\emptyset \\ 0 & -\cos\emptyset & sen\,\emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \cdot sen\,\emptyset + S_z \cdot \cos\emptyset \\ -S_y \cdot \cos\emptyset + S_z \cdot sen\,\emptyset \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{-S_x}{-S_y \cdot \cos\emptyset + S_z \cdot sen\,\emptyset} \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{-S_y \cdot sen\,\emptyset - S_z \cdot \cos\emptyset}{-S_y \cdot \cos\emptyset + S_z \cdot sen\,\emptyset} \end{cases}$$

- **Cara sur**



El gnomon es polar y de longitud unidad. Está situado en el eje Z'. Las coordenadas de su extremo son **G**(0,0,1).

Las coordenadas de $\vec{S}$ se obtienen girando el sistema horizontal un ángulo de 180º en el eje Z y, a continuación, un giro de $90° + \emptyset$ en eje X:

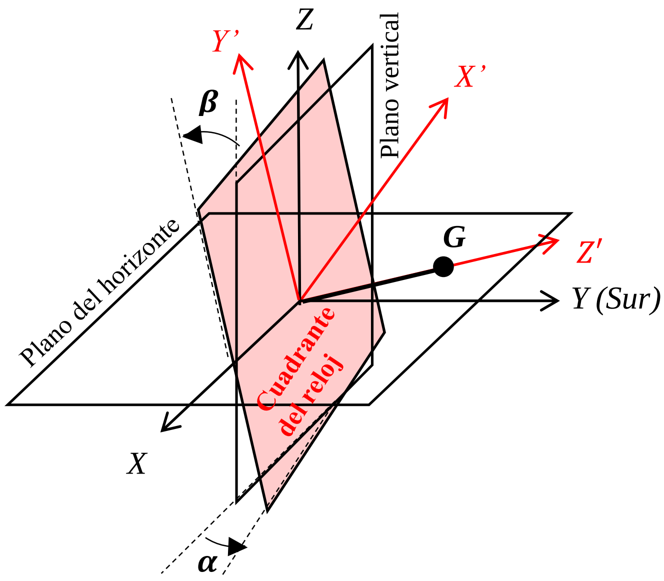
$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(90° + \emptyset)) & sen\,(90° + \emptyset) \\ 0 & -sen\,(90° + \emptyset) & cos\,(90° + \emptyset) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\,180° & sen\,180° & 0 \\ -sen\,180° & cos\,180° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -sen\,\emptyset & cos\,\emptyset \\ 0 & -cos\,\emptyset & -sen\,\emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -sen\,\emptyset & cos\,\emptyset \\ 0 & -cos\,\emptyset & -sen\,\emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S_x \\ -S_y \\ S_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -S_x \\ S_y \cdot sen\,\emptyset + S_z \cdot \cos\emptyset \\ S_y \cdot \cos\emptyset - S_z \cdot sen\,\emptyset \end{pmatrix}.$$ Por tanto:

$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x}{S_y \cdot \cos\emptyset - S_z \cdot sen\,\emptyset} \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{-S_y \cdot sen\,\emptyset - S_z \cdot \cos\emptyset}{S_y \cdot \cos\emptyset - S_z \cdot sen\,\emptyset} \end{cases}$$

➢ CUADRANTE OBLICUO



El gnomon, de longitud unidad, **no es polar, es perpendicular al cuadrante** (está en *Z'*); las coordenada de su extremo son ***G***(0,0,1). Para determinar las coordenadas de $\vec{S}$, partimos de los resultados del cuadrante vertical declinante a los que añadimos un giro $\boldsymbol{\beta}$ en sentido horario visto desde el eje *X* del plano vertical. Es decir, aplicamos un giro $-\beta$ en eje *X* del plano vertical a **(10)**:

$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\beta) & sen\,(-\beta) \\ 0 & -sen\,(-\beta) & cos(-\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S_x \cdot cos\,\alpha - S_y \cdot sen\,\alpha \\ S_z \\ -S_x \cdot sen\,\alpha + S_y \cdot cos\,\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -sen\,\beta \\ 0 & sen\,\beta & cos\,\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S_x \cdot cos\,\alpha - S_y \cdot sen\,\alpha \\ S_z \\ -S_x \cdot sen\,\alpha + S_y \cdot cos\,\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -S_x \cdot cos\,\alpha - S_y \cdot sen\,\alpha \\ S_z \cdot \cos\beta + S_x \cdot sen\,\alpha \cdot sen\,\beta - S_y \cdot cos\,\alpha \cdot sen\,\beta \\ S_z \cdot sen\,\beta - S_x \cdot sen\,\alpha \cdot \cos\beta + S_y \cdot cos\,\alpha \cdot \cos\beta \end{pmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

Por tanto:

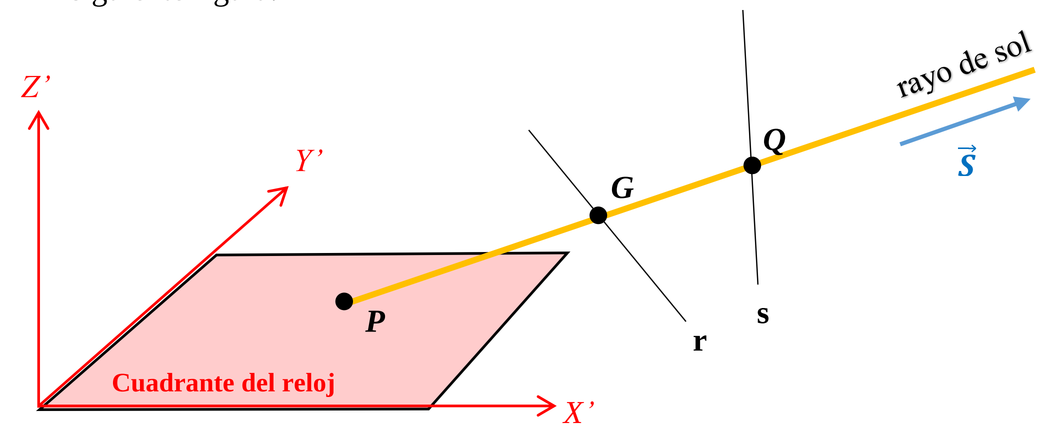
$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x \cdot cos\,\alpha + S_y \cdot sen\,\alpha}{-S_x \cdot sen\,\alpha \cdot \cos\beta + S_y \cdot cos\,\alpha \cdot \cos\beta + S_z \cdot sen\,\beta} \\[2ex] P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{-S_x \cdot sen\,\alpha \cdot sen\,\beta + S_y \cdot cos\,\alpha \cdot sen\,\beta - S_z \cdot \cos\beta}{-S_x \cdot sen\,\alpha \cdot \cos\beta + S_y \cdot cos\,\alpha \cdot \cos\beta + S_z \cdot sen\,\beta} \end{cases}$$

➢ CUADRANTE OBLICUO BIFILAR

El “gnomon” está formado por dos hilos (horizontal y vertical, normalmente) paralelos al cuadrante y separados de él sendas distancias (h, v). La sombra de estos hilos formará una cruz cuyo centro nos servirá para leer la hora.

El vector $\vec{S}$ tiene las mismas coordenadas del cuadrante oblicuo (ver **(11)).**

El punto $\boldsymbol{G}$ no será es el extremo de ningún gnomon, pero hará el mismo papel a efectos de hallar $\boldsymbol{P}$. Para determinarlo, nos situaremos en el plano del cuadrante oblicuo, según la siguiente figura.

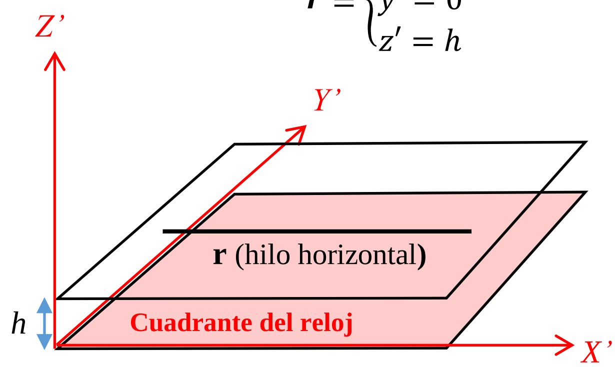


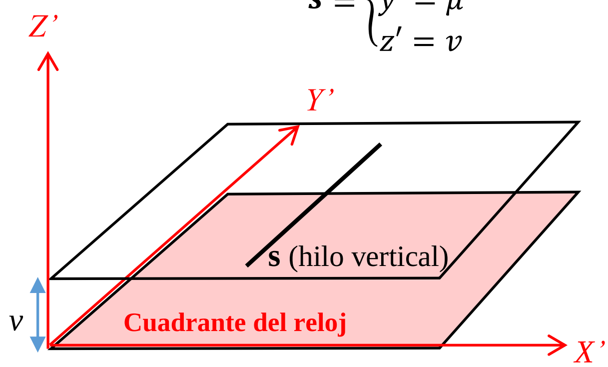
Sean las rectas **r** y **s** los hilos del reloj, y sean $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{Q}$ los puntos de corte de los mismos con el rayo de sol. Las rectas **r** y **s** vienen dadas en forma paramétrica, con parámetros λ y μ, respectivamente. Por tanto, las coordenadas de $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{P}$ en función de sus respectivos parámetros son $\boldsymbol{G}(x'(\lambda), y'(\lambda), z'(\lambda))$ y $\boldsymbol{P}(x'(\mu), y'(\mu), z'(\mu))$. Para determinar $\boldsymbol{G}$, que es lo que vamos buscando, consideraremos que el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{GQ}}$ es proporcional a $\vec{\boldsymbol{S}}(S_{x'}, S_{y'}, S_{z'})$, cumpliendo:

$$\frac{x'(\mu) - x'(\lambda)}{S_{x'}} = \frac{y'(\mu) - y'(\lambda)}{S_{y'}} = \frac{z'(\mu) - z'(\lambda)}{S_{z'}} \quad \textbf{(12)}$$

De esta expresión, determinamos el valor de λ y, a continuación, las coordenadas de **G**. Este sería el proceso general. Aplicándolo a nuestro caso particular:

$$\boldsymbol{r} \equiv \begin{cases} x' = \lambda \\ y' = 0 \\ z' = h \end{cases} \qquad \boldsymbol{s} \equiv \begin{cases} x' = 0 \\ y' = \mu \\ z' = v \end{cases}$$





Sustituyendo en **(12)**: $\displaystyle \frac{0-\lambda}{S_{x'}} = \frac{\mu - 0}{S_{y'}} = \frac{v-h}{S_{z'}} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{(h-v)}{S_{z'}} \cdot S_{x'}$

$\boldsymbol{G}$ nos queda así: $\displaystyle \mathbf{G}(x'(\lambda), y'(\lambda), z'(\lambda)) = \mathbf{G}(\lambda, 0, h) = \mathbf{G}\left(\frac{(h-v)}{S_{z'}} \cdot S_{x'}, 0, h\right)$

Por tanto:

$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot h + \dfrac{(h-v)}{S_{z'}} \cdot S_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot v \\[2ex] P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot h \end{cases}$$

Sustituyendo las coordenadas de $\vec{\boldsymbol{S}}$ llegamos a la expresión final:

$$\begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x \cdot cos\,\alpha + S_y \cdot sen\,\alpha}{-S_x \cdot sen\,\alpha \cdot \cos\beta + S_y \cdot cos\,\alpha \cdot \cos\beta + S_z \cdot sen\,\beta} \cdot v \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{-S_x \cdot sen\,\alpha \cdot sen\,\beta + S_y \cdot cos\,\alpha \cdot sen\,\beta - S_z \cdot \cos\beta}{-S_x \cdot sen\,\alpha \cdot \cos\beta + S_y \cdot cos\,\alpha \cdot \cos\beta + S_z \cdot sen\,\beta} \cdot h \end{cases}$$

- **CUADRANTES ANALEMÁTICO Y AZIMUTAL**

Ambos son cuadrantes horizontales y tienen el mismo vector $\vec{\boldsymbol{S}}$ que ya vimos en ese tipo de cuadrante, es decir:

$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_x \\ -S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

Lo que cambia son las coordenadas de $\boldsymbol{G}$:

$$Analemático \begin{cases} G_{x'} = 0 \\ G_{y'} = \boldsymbol{a} \cdot tg\,\delta \cdot \cos\emptyset \quad (\boldsymbol{a}\ es\ el\ semieje\ mayor\ de\ la\ elipse) \\ G_{z'} = g \quad (altura\ del\ gnomon) \end{cases}$$

$$Azimutal \begin{cases} G_{x'} = 0 \\ G_{y'} = 0 \\ G_{z'} = g \quad (altura\ del\ gnomon) \end{cases}$$

Por tanto, las proyecciones quedan así:

$$Analemático \begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x}{S_z} \cdot g \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{S_y}{S_z} \cdot g + \boldsymbol{a} \cdot tg\,\delta \cdot cos\,\emptyset \end{cases}$$

$$Azimutal \begin{cases} P_{x'} = \dfrac{-S_{x'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{x'} = \dfrac{S_x}{S_z} \cdot g \\ P_{y'} = \dfrac{-S_{y'}}{S_{z'}} \cdot G_{z'} + G_{y'} = \dfrac{S_y}{S_z} \cdot g \end{cases}$$