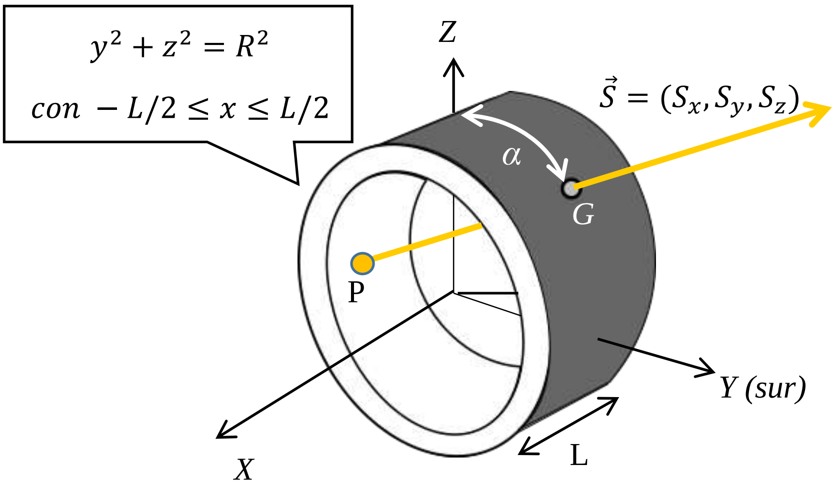
CONTENIDO

Proyección solar sobre limbos curvos

➢ LIMBO ANULAR



El limbo es la parte interior de un anillo de radio R y anchura L que tiene un agujero (***G***) situado a un ángulo α de la vertical. Un rayo de Sol entra por G e impacta en P´. Pretendemos obtener las coordenadas del punto luminoso P. Las coordenadas de ***G*** con respecto al anillo son las siguientes:

$$\begin{cases} G_x = 0 \\ G_y = R \cdot sen\ \alpha \\ G_z = R \cdot cos\ \alpha \end{cases}$$

La recta ***r*** que pasa por el punto ***G***(G_x, G_y, G_z) y tiene como vector director $\vec{\boldsymbol{S}} = (S_x, S_y, S_z)$ es:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x = G_x + t \cdot S_x = 0 + t \cdot S_x \\ y = G_y + t \cdot S_y = R \cdot sen\ \alpha + t \cdot S_y \\ z = G_z + t \cdot S_z = R \cdot cos\ \alpha\ + t \cdot S_z \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

La intersección de ***r*** con el anillo será: $(R \cdot sen\ \alpha + t \cdot S_y)^2 + (R \cdot cos\ \alpha + t \cdot S_z)^2 = R^2$

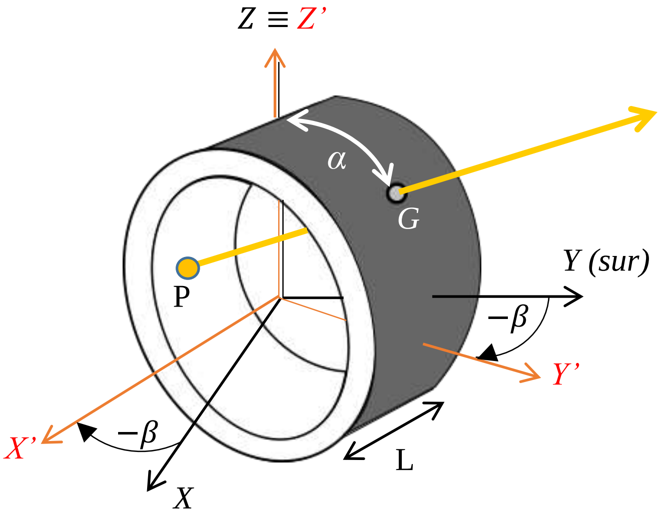
$$\Longrightarrow R^2 \cdot sen^2\alpha + t^2 \cdot {S_y}^2 + 2R \cdot sen\ \alpha \cdot t \cdot S_y + R^2 \cdot cos^2\alpha + t^2 \cdot {S_z}^2 + 2R \cdot \cos\alpha \cdot t \cdot S_z = R^2$$

$$\Longrightarrow R^2 \cdot (sen^2\alpha + cos^2\alpha) + t \cdot (t \cdot {S_y}^2 + 2R \cdot sen\ \alpha \cdot S_y + t \cdot {S_z}^2 + 2R \cdot \cos\alpha \cdot S_z) = R^2$$

$$\Longrightarrow t \cdot (t \cdot {S_y}^2 + 2R \cdot sen\ \alpha \cdot S_y + t \cdot {S_z}^2 + 2R \cdot \cos\alpha \cdot S_z) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} t = 0\ (el\ propio\ agujero) \\ t \cdot {S_y}^2 + 2R \cdot sen\ \alpha \cdot S_y + t \cdot {S_z}^2 + 2R \cdot \cos\alpha \cdot S_z = 0 \end{cases}$$

$$Por\ tanto, \qquad \boxed{t = \frac{-2R \cdot (sen\ \alpha \cdot S_y + \cos\alpha \cdot S_z)}{{S_y}^2 + {S_z}^2}}$$



En el caso del reloj anular, el anillo, suspendido por una cuerda situada en Z, debe girar un ángulo igual al azimut para ir enfrentándose al Sol. Además, habrá que efectuar un giro adicional para que la proyección caiga sobre la línea de la fecha correspondiente. Llamemos β al ángulo total de giro, es decir, giramos β en sentido horario alrededor de Z:

$$\begin{pmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\beta & -sen\,\beta & 0 \\ sen\,\beta & cos\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\beta \cdot S_x - sen\,\beta \cdot S_y \\ sen\beta \cdot S_x + cos\,\beta \cdot S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

P queda así:

$$\begin{cases} P_{x'} = t' \cdot S_{x'} = \dfrac{-2R \cdot \left(sen\,\alpha \cdot S_{y'} + \cos\alpha \cdot S_{z'}\right)}{{S_{y'}}^2 + {S_{z'}}^2} \cdot S_{x'} \\ P_{y'} = R \cdot sen\,\alpha + t' \cdot S_{y'} = R \cdot sen\,\alpha - \dfrac{2R \cdot \left(sen\,\alpha \cdot S_{y'} + \cos\alpha \cdot S_{z'}\right)}{{S_{y'}}^2 + {S_{z'}}^2} \cdot S_{y'} \\ P_{z'} = R \cdot cos\,\alpha\ + t' \cdot S_{z'} = R \cdot cos\,\alpha - \dfrac{2R \cdot \left(sen\,\alpha \cdot S_{y'} + \cos\alpha \cdot S_{z'}\right)}{{S_{y'}}^2 + {S_{z'}}^2} \cdot S_{z'} \end{cases}$$

donde:

$$\begin{cases} S_{x'} = cos\beta \cdot S_x - sen\,\beta \cdot S_y \\ S_{y'} = sen\beta \cdot S_x + cos\,\beta \cdot S_y \\ S_{z'} = S_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x = cos\,\delta \cdot sen\,h \\ S_y = cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot sen\,\emptyset - sen\,\delta \cdot cos\,\emptyset \\ S_z = cos\,\delta \cdot cos\,h \cdot cos\,\emptyset + sen\,\delta \cdot sen\,\emptyset \end{cases}$$

α: ángulo desde el punto de suspensión del anillo al agujero
β: ángulo girado (azimut + giro adicional)
h: ángulo horario
δ: declinación
$\emptyset$: latitud